

学校编码: 10384

分类号 _____ 密级 _____

学号: 19020100153952

UDC _____

廈門大學

博 士 学 位 论 文

内 p_n 群

Finite p -groups of class $> n$ whose proper subgroups
are of class $\leq n$

李 璞 金

指导教师姓名: 曾 吉 文 教授

专 业 名 称: 基 础 数 学

论文提交日期: 2013 年 4 月

论文答辩日期: 2013 年 6 月

学位授予日期: 2013 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2013 年 月

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

摘 要

一个有限群 G 被称为一个内 \mathcal{P}_n 群, 如果 G 的幂零类大于 n , 但是 G 的所有真子群的幂零类都不超过 n . 本文主要研究 G 是有限 p 群的情况, 内 \mathcal{P}_n 群意指内 \mathcal{P}_n 的 p 群.

本文分五章. 第一章是引言. 第二章是预备知识. 第三章主要研究内 \mathcal{P}_n 群的性质. 对内 \mathcal{P}_n 群 G 的极小生成元个数 $d(G)$ 以及幂零类 $c(G)$ 做出了估计. 特别地, 给出了内 \mathcal{P}_2 群的进一步性质. 对内 \mathcal{P}_2 群的幂零类做出了更加精确的估计, 即 $c(G) = 3$. 给出了内 \mathcal{P}_2 群的两个重要商群的刻画, 这些刻画是分类内 \mathcal{P}_2 群的出发点. 第四章对 2 元生成类 2 的奇阶有限 p 群进行了分类, 这一工作是分类内 \mathcal{P}_2 群的准备工作. 第五章对 $p > 3$ 时的内 \mathcal{P}_2 的 p 群进行了同构分类. 对 $p = 2$ 或 3 的情况, 类似于本文的方法也可给出其同构分类.

关键词: 内 \mathcal{P}_n 群; 亚交换 p 群; 幂零类.

厦门大学博硕士论文摘要库

Abstract

A finite group G is said to be a minimal non- \mathcal{P}_n group if G is not a group of class $\leq n$ whose proper subgroups are of class $\leq n$. Minimal non- \mathcal{P}_n p -groups are investigated in this thesis.

This thesis consists of five chapters. Chapter one is introduction. Chapter two is preliminaries. In chapter three, some properties of minimal non- \mathcal{P}_n p -groups are given. For example, the bound of the number of minimal generators and the nilpotency class of a minimal non- \mathcal{P}_n p -group are given. In particular, we obtained more deep properties for a minimal non- \mathcal{P}_2 p -group. For example, the sharp bound of nilpotency class of a minimal non- \mathcal{P}_2 p -group are equal to 3. In addition, some properties of two quotient groups related to minimal non- \mathcal{P}_2 p -groups are given. These properties are the start point of the classification of minimal non- \mathcal{P}_2 p -groups. In chapter four, two-generator p -groups of odd order with nilpotency class 2 are classified. In chapter five, minimal non- \mathcal{P}_2 p -groups are classified for $p > 3$. By using the method as the thesis shows, minimal non- \mathcal{P}_2 p -groups can be classified for $p = 2$ or 3.

Key words: minimal non- \mathcal{P}_n p -groups; metabelian p -groups; nilpotency class.

厦门大学博硕士论文摘要库

目 录

中文摘要	i
英文摘要	iii
第一章 引言	1
§1.1 有限 p 群的分类问题	3
§1.2 临界群	4
§1.3 幂零类	4
§1.4 我们的工作	5
第二章 预备知识	7
§2.1 基本概念和符号	7
§2.2 常用的结论	8
第三章 内 \mathcal{P}_n 的 p 群的某些性质	10
第四章 2 元生成类 2 的奇阶有限 p 群的分类	16
第五章 内 \mathcal{P}_2 的 p 群的分类 ($p > 3$)	20
参考文献	94
致谢	101

厦门大学博硕士论文摘要库

Contents

Abstract (in Chinese)	i
Abstract (in English)	ii
Chapter 1 Introduction	1
§1.1 The classification problem of finite p -groups	3
§1.2 Critical groups	4
§1.3 Nilpotency class	4
§1.4 About our work	5
Chapter 2 Preliminaries	7
§2.1 Basic concepts and symbols	7
§2.2 Used results	8
Chapter 3 Some properties of minimal non-\mathcal{P}_n p-groups	10
Chapter 4 The classification of two-generator p-groups of odd order with nilpotency class 2	16
Chapter 5 The classification of minimal non-\mathcal{P}_2 p-groups for $p > 3$	20
References	94
Acknowledgements	101

厦门大学博硕士论文摘要库

§1 引言

群在抽象代数中具有基本的重要地位. 许多代数结构, 包括环、域和向量空间等可以看作是在群的基础上添加新的运算和公理而形成的. 群的概念在数学的许多分支都有应用. 例如: 在代数拓扑中, 群用于描述拓扑空间转换中不变的性质, 例如基本群, 同伦群等. 李群的概念在微分方程和流形中扮演着很重要的角色. 在组合数学中, 交换群和群作用常用来简化在某些集合内的元素的计算. 群论的应用不仅限于数学, 它在物理、化学和计算机科学等学科都有重要应用.

有限群无论从理论本身还是从实际应用来说都很重要. 关于有限群的研究非常活跃, 其中最著名的成果就是有限单群的分类, 它是 20 世纪数学领域最重要的结果之一, 有兴趣的读者可参看文 [45, 46]. 有限群的研究大致可分两个大的方面: 一是通过对群的子集进行研究, 来反映大群的性质和结构. 一是把群映射到另外一个对象 (通常也是群), 通过对另一个对象的研究来反映原来群的性质和结构. 例如: 商群就是群的同态映射象, 群作用就是把群同态映射到对称群的子群, 群表示就是把群同态映射到一般线性群的子群.

有限 p 群是有限群最基本和最重要的分支之一. 从以下几个方面可看出有限 p 群的重要性. 首先, 有限群的结构与它们的 Sylow p -子群的性质密切相关. 有限群的许多问题可以通过详细考查它的 p -子群的有关问题来解决. 特别是, 如果有限非交换单群 G 的 Sylow 2-子群的结构是已知的, 则 G 的结构几乎被唯一确定. 其次, p -群为组合、上同调、计算机科学等领域提供了理想的研究对象. 最后, 单群是具有最短主群列的群, 即正规子群最少的群. 幂零群可以看做具有最长主群列的群, 并且所有可能阶的正规子群都存在. 这是两种极端的情况. 在单群分类完成以后, 自然地, 另一种极端情况 – 幂零群的研究得到更加重视. 由于有限幂零群是其 sylow 子群的直积, 因此有限 p 群的研究就在幂零群的研究中占有中心的地位. 另一方面, 幂零群在有限群中占有很大的比重. 例如: 在阶不大于 2000 的所有不同构的群中, 有 49497919345 个互不同构的 p 群, 有 412610139 个互不同构的非 p 群. 由此可见, 在阶不大于 2000 的所有不同构的群中, 99% 以上的都是 p 群. A. Mann 在文 [80](1999) 中提出了这样一个猜想: “Is it true that most finite groups are nilpotent?” 并对该猜想的合理性作了解释. 综上所述, 有限 p 群在有限群的研究中占有十分重要的地位.

有限 p 群的研究有着悠久的历史. 有限 p 群的许多基础性质被 L. Sylow, G. Frobenius, W. Burnside 等得到. 但是 P. Hall 建立了现代 p 群理论的基础, 见 20 世纪 30 年

代左右发表的三篇论文[47, 48, 49]. 在文 [47] 和 [48] 中, P. Hall 首先提出了正则 p 群这一重要群类, 给出了一些正则 p 群的判定准则和非正则 p 群的深刻性质. [49] 则是有限 p 群分类的若干问题. 这三篇文章是系统研究有限 p 群的奠基之作. P. Hall 以后, N. Blackburn 的论文 [35](1958) 和 [36](1961) 研究了另一类非常重要的 p 群—极大类 p 群. 并给出了很多非正则 p 群的性质. 除了这一工作外, 他还分类和研究了很多其他重要的 p 群子类以及很多别的工作, 见 [37, 38, 39, 40] 等. A. Mann 给出了很多极大类 p 群的重要定理的证明和正则 p 群的进一步的结果, 见 [74, 75, 76, 77, 78, 79]. 特别是文 [70] 和 [71](1987) 中, 他和 A. Lubotzky 首次引进幂导 p 群的概念并系统进行了研究, 幂导 p 群是继正则 p 群和极大类 p 群之后第三类非常重要的有限 p 群. Y. Berkovich 则主要研究具有给定子群结构的有限 p 群的性质和分类, 见文 [32, 33, 34]. 有限单群分类完成以后, 很多著名的群论专家转入有限 p 群的研究, 例如: G. Glauberman, Z. Janko 等, 他们已发表了许多有限 p 群的研究论文, 见文 [42, 43, 44, 56, 57, 58, 59]. 特别要提到的是, 首先由 Y. Berkovich, 之后他与 Z. Janko 合作, 比较系统地整理了有限 p 群的研究结果, 出版了 p 群的专著 [28, 29, 30]. 书中提出了大量待研究的问题, 是研究有限 p 群的重要参考书.

我国对于 p 群的研究始于华罗庚和段学复先生 20 世纪 30 年代组织的 p 群讨论班. 他们主要对 p 群的算术结构、换位子结构开展研究, 获得了许多深刻的结果, 见 [52, 53, 88, 89]. 北京大学徐明曜教授在 1960-1980 年代在 p 群方面做了大量高水平的研究工作. 他在 1964 年的北大本科毕业论文 [12] 中, 就已得到了多项国际领先的成果. 之后, 他继续对正则 p 群以及 p 群的幂结构作了深入系统的研究. 见 [13, 14, 15, 16, 91, 92]. 自 20 世纪 80 年代起, 他改做群与图和置换群. 2003 年后, 徐明曜教授转回研究 p -群, 又获得了许多新的结果, 见 [85, 93, 94, 95, 101]. 20 世纪 80 年代起, 广西大学的俞曙霞、班桂宁、李世荣教授关于 p 群的自同构作了不少工作, 可见 [1, 6, 20, 21, 27, 96]. 近年来, 随着 p 群研究的活跃, 国内许多群论学者也在 p 群研究方面做了大量的工作. 例如, 山西师范大学张勤海教授领导的 p 群团队, 取得许多研究成果, 已在国内外高水平杂志发表论文 50 余篇, 见 [22, 23, 24, 85, 97, 98, 99, 100, 101] 等. 其成果在 Y. Berkovich 和 Z. Janko 的 p 群专著 [31] 中专辟一节 “A survey of results of p -group theorists from Shanxi Normal University” 给予介绍. 在国际上产生了影响. 除了山西师大 p 群团队之外, 国内许多群论学者也在 p 群方面做了很好的工作, 见 [7, 65, 68, 69, 72, 84, 104] 等. 另外, 根据 p 群研究和发展的需要, 2010 年徐明曜和曲海鹏出版了我国第一部 p 群专著 [18].

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库